<table>
<tr><td colspan="3">FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM</td><td colspan="2">FJFI ČVUT V PRAZE</td></tr>
<tr><td>Číslo úlohy:</td><td colspan="3">Název úlohy:</td><td>Datum měření:</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">Cavendishův experiment</td><td>09. 10. 2006</td></tr>
<tr><td>Kroužek:</td><td>Skupina:</td><td colspan="2">Jméno:</td><td>Klasifikace:</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td><td colspan="2">Tomáš Jakoubek</td><td></td></tr>
</table>

Zadání:

1. Změřte hmotnost přiložených olověných koulí
2. Nastavte zařízení a světelnou stopu na pasové měřidlo na protější zdi
3. Určete vzdálenost zrcátka měřidla od zdi
4. Nastavte zařízení ohledně jeho výchylky
5. Změřte direkční moment torzního kyvadla (zařízení) určením doby kyvu volného torzního kyvadla
6. Podle postupu v původním textu změřte čas a výchylku potřebnou pro stanovení gravitační konstanty (změřte dostatečný počet hodnot pro statistické vyhodnocení)
7. Výsledky zpracujte statistický a určete největší zdroje chyb při měření

Vypracování:

Úvod do problematiky:

Gravitační konstantu v tomto pokusu měříme pomocí torzního kyvadla – přístroje složeného z dvou malých kuliček připevněných ramenem k vláknu – a dvou těžkých olověných koulí. Mezi koulemi působí gravitační přitažlivá síla F, pro kterou známe vztah (1), a kterou jsme schopni pomocí torzních vah měřit.

$$F = Gm_1m_2/b^2 \qquad (1),$$

kde G je gravitační konstanta, m_1, m_2 hmotnosti daných těles (v našem případě je m_1 hmotnost velké koule, m_2 malé koule) a b vzdálenost jejich těžišť.

Tato síla je velmi slabá, proto musíme odstranit všechny rušivé vlivy, jako např. elektrostatické působení mezi koulemi nebo vibrace. První problém jsme řešili uzemněním přístroje, druhý se – vzhledem k podmínkám v laboratoři – až tak dobře odstranit nepodařilo.

Úhel zkrutu torzního vlákna je velmi malý, proto ho měříme pomocí světelné páky – na torzním vlákně je přiděláno malé zrcátko, které odráží laserový paprsek na měřidlo na vzdálené zdi.

Princip měření spočívá v přechodu z pozice I do pozice II (Obr. 1). Kyvadlo má v pozici I a II vždy jinou rovnovážnou polohu, kterou lze určit, a ze které lze určit úhel zkrutu a tedy i gravitační síla.

Gravitační síla F, působící mezi malými a velkými koulemi vyvolává kroutící moment

$$\tau_{grav} = 2Fd \qquad (2),$$

kde d je vzdálenost malé koule od osy otáčení. Tento moment je kompenzován ($\tau_{grav} = -\tau_{band}$) zkrutem torzního vlákna

$$\tau_{band} = -\kappa\theta \qquad (3),$$

kde θ je úhel zkrutu vlákna a κ jeho direkční moment.

Pro úhel θ platí vztah

$$\theta = \Delta S/4L \qquad (4),$$

kde L je vzdálenost zrcátka na torzních vahách od měřidla na zdi a ΔS je vzdálenost rovnovážných poloh v pozicích I a II odečítaná na měřidle na zdi (odvození patrné z Obr. 1).

Poslední neznámou zůstává direkční moment kyvadla. Lze jej získat z periody kmitu torzního kyvadla a ze vztahu pro periodu

$$T^2 = 4\pi^2 I/\kappa \qquad (5),$$

kde I je moment setrvačnosti torzního kyvadla. Ten je určen vztahem

$$I = 2m_2(d^2 + 2r^2/5) \qquad (6),$$

kde r je poloměr kuličky na torzním kyvadle, m_2 její hmotnost a d vzdálenost od osy otáčení. Ze vztahů (6) a (7) tak pro direkční moment torzního kyvadla dostáváme

$$\kappa = 8\pi^2 m_2(d^2 + 2r^2/5)/T^2 \qquad (7),$$

kde m_2 je hmotnost malé koule, d je vzdálenost malé koule od osy otáčení, r poloměr malé koule a T perioda kmitů kyvadla.

Kombinací vztahů (1), (2), (3), (4) a (7) získáme vztah pro gravitační konstantu

$$G = \Delta S \pi^2 b^2 (d^2 + 2r^2/5)/L d m_1 T^2 \qquad (8),$$

kde ΔS je vzdálenost rovnovážných poloh v pozicích I a II (měřená na zdi), b je vzdálenost těžišť velké a malé koule, d vzdálenost malé koule od osy otáčení, r poloměr malé koule, L vzdálenost zrcátka od zdi, m_1 hmotnost velké koule a T perioda kmitů kyvadla.

Tento postup však obsahuje systematickou chybou – na malou kouli nepůsobí jen blízká velká koule, ale i ta vzdálenější a to silou F_0 (Obr. 2). Pro složku f platí (patrné z Obr. 2)

$$f = G m_1 m_2 b/(b^2 + 4d^2)^{3/2} = (b^3/(b^2 + 4d^2)^{3/2})(G m_1 m_2/b^2) = \beta F \qquad (9),$$

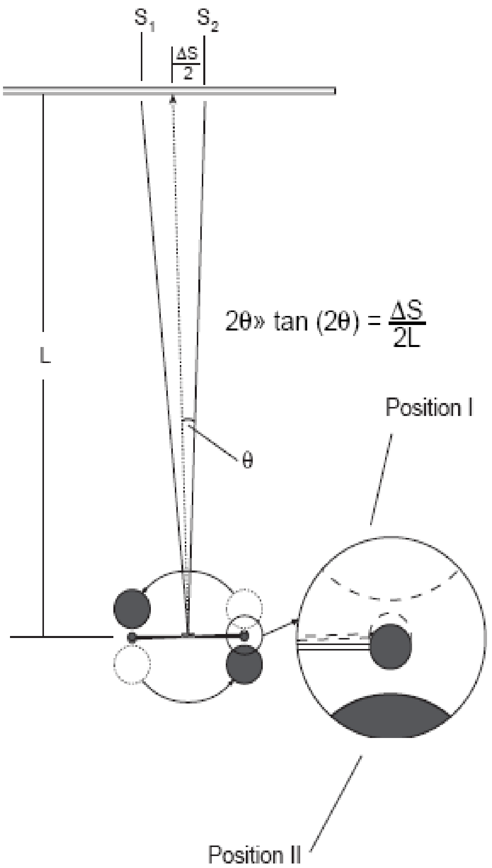
odkud

$$\beta = (b^3/(b^2 + 4d^2)^{3/2}) \qquad (10).$$

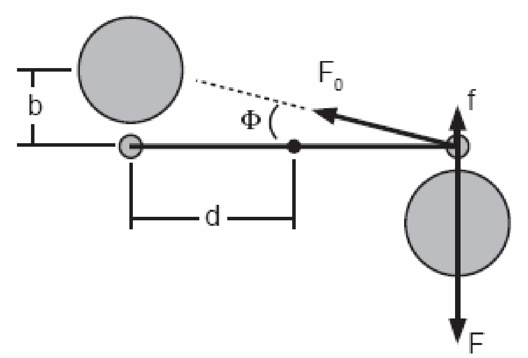
Celková síla působící na malou kouli je $F_{net} = F - f = F - \beta F = F(1 - \beta)$, proto pro opravenou hodnotu gravitační konstanty platí

$$G_0 = G/(1 - \beta) \qquad (11),$$

kde G (naměřená) je z (8) a β z (10).



Obr. 1: Pozice systému I, II a odvození vztahu pro úhel



Obr. 2: Oprava systematické chyby

Použité přístroje:

Pokusný set PASCO AP-8215 obsahující: gravitační torzní váhy, dvě velké olověné koule. Digitální váhy, pásové měřidlo, laser (He-Ne), stopky, měřidlo připevněné na zdi (papírové pásové měřidlo).

Postup měření:

1. hmotnost olověných koulí:
Pro výpočet gravitační konstanty je potřeba znát hmotnost velkých koulí – m_1. Pro zjištění hmotnosti jsme použili digitální váhy. Naměřené hodnoty viz. Tab. 1.

$$m_{11} = (1494{,}0 \pm 0{,}3)\ \mathrm{g},$$
$$m_{12} = (1494{,}8 \pm 0{,}2)\ \mathrm{g}.$$

Hmotnosti obou koulí jsou tedy odlišné. Ve výpočtu však předpokládáme stejnou hmotnost. Nabízí se vzít pro výpočet jako hodnotu hmotnosti velké koule průměr m_{11} a m_{12}, tedy $m_1 = 1494{,}4$ g.

2. nastavení zařízení a světelné stopy na měřidlo:
Naším dalším krokem bylo nastavení přístroje. Pomocí stavěcích šroubů jsme nastavili přístroj tak, aby bylo torzní vlákno kolmé na rovinu, v níž se pohybují velké koule, tzn. aby směřovalo do vyznačeného otvoru. Pomocí vodiče jsme přístroj uzemnili. Pak jsme nastavili laser, aby paprsek směřoval co nejvíce do středu zrcátka na torzním vlákně a odtud se odrážel na střed pásového měřidla na protější zdi. Tím byla první část nastavení přístroje dokončena.

3. určení vzdálenosti zrcátka od měřidla na zdi:
Pomocí pásového měřidla jsme určili tuto vzdálenost na $L = (612 \pm 0{,}6)$ cm. Naměřené hodnoty viz. Tab. 2.

4. nastavení zařízení ohledně jeho výchylky:
Toto nastavování přístroje byla nejtěžší část celého měření. Od předešlých měření bylo torzní vlákno značně (!) překroucené. Kuličky kyvadla doslova narážely na ochranné plexisklo. To se vždy projevilo prudkou změnou pohybu světelné stopy na pásovém měřidle. Podle těchto odrazů jsme pootáčeli horním uchycením torzního vlákna. Vzhledem k tomu, že doba jednoho kmitu se pohybovala okolo 9 minut – teprve pak se dalo zkontrolovat, jestli jsme šroubem pootočili dostatečně, tedy že kyvadlo nenaráží ani na jedné straně – toto nastavování nám zabralo velkou část času určeného na měření. Nakonec se nám tímto postupem podařilo přístroj docela přesně nastavit. Ovšem za cenu kratšího času na další měření.

5. direkční moment torzního kyvadla:
K určení bylo potřeba změřit dobu kmitu volného torzního kyvadla (bez velkých koulí). Vzhledem k časové tísni způsobené značně rozhozeným nastavením přístroje jsme uskutečnili pouze jedno měření. Dobu kmitu jsme tedy stanovili na $T = 505$ s.

Z manuálu k pokusu jsme znali hodnoty $m_2 = (38{,}3 \pm 0{,}2)$ g (hmotnost malé koule), $d = 50{,}0$ mm (vzdálenost malé koule od osy otáčení) a $r = 9{,}55$ mm (poloměr malé koule).

Dosazením do vztahu (7) jsme určili direkční moment torzního kyvadla na
$\kappa = 3{,}0077 \times 10^{-8}\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}$.

6. stanovení gravitační konstanty:
Bohužel i zde se projevila časová ztráta způsobená nastavováním přístroje a bylo možné provést pouze jedno měření. Změřili jsme krajní polohy světelné stopy v pozici I a v pozici II a vzdálenost ΔS určili jako rozdíl středních hodnot. Ideální postup by byl vyčkat, až se kyvadlo ustálí v rovnovážné

poloze v pozici I, poté přesunout velké koule do pozice II a opět vyčkat ustálení kyvadla. Takto naměřené hodnoty s_1 a s_2 by byly jistě přesnější. Námi určená vzdálenost je tedy $\Delta S = 17{,}5$ cm a doba kmitu T = 510 s. Hodnoty viz. Tab. 3.

Z těchto hodnot určíme $G = 8{,}0098 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$. Po korekci systematické chyby podle vztahu (11) dostaneme hodnotu gravitační konstanty $\underline{G_0 = 8{,}6589 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}}$.

Naměřené hodnoty:

Č. měření	m_{11} [g]	m_{12} [g]
1	1494,00	1494,00
2	1493,00	1495,00
3	1494,00	1495,00
4	1494,00	1495,00
5	1495,00	1495,00

Tab. 1: Hmotnosti přiložených koulí

Č. měření	L [cm]
1	613
2	611
3	612

Tab. 2: Vzdálenost zrcátka od měřidla na zdi

t [s]	s [cm]	Pozice
0	54	I
255	21,5	I
532	79	II
780	31,5	II

Tab. 3: Maximální výchylky světelné stopy

Výpočet T a ΔS:
$T = 2 \times 255\ \mathrm{s} = 510\ \mathrm{s}$
$s_1 = (54 + 21{,}5)/2$ cm
$s_2 = (79 + 31{,}5)/2$ cm
$\Delta S = |s_1 - s_2| = 17{,}5$ cm

Závěr:

Direkční moment torzního kyvadla jsme určili jako $\underline{\kappa = 3{,}0077 \times 10^{-8}\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}}$.
Gravitační konstantu jsme naměřili a spočítali jako $\underline{G_0 = 8{,}6589 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}}$. Tabelovaná hodnota podle [2] je $G = 6{,}672 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$. To je rozdíl zhruba $1{,}99 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$. Relativní chyba našeho měření oproti tabelované hodnotě tedy činí 29,8%. To je chyba dost výrazná. Za největší zdroje chyb považuji: rušivé a jen velmi těžko odstranitelné vlivy prostředí – kolegové v laboratoři, okolo projíždějící tramvaje (vibrace), případně i přítomnost těžkých objektů v okolí přístroje (zeď, my), které také působily gravitačními silami; dalším zdrojem chyb pak je nepřesnost měření – perioda se měřila velmi obtížně – bylo těžké určit, kdy je světelná stopa v krajní poloze a čekat na úplné ustálení v rovnovážné poloze bylo vzhledem k časovým problémům nemožné (viz. bod 6 postupu měření). Další nepříjemností bylo měření vzdálenosti zrcadla a měřidla na zdi pomocí 5 m dlouhého pásového měřidla. Vzdálenost byla ale přes 6 metrů, což se s tímto měřidlem určovalo velmi špatně. Celkově by pro lepší výsledek měření bylo třeba více času. Věřím, že kdybychom přístroj nastavili v kratší době (což by se nám asi nepodařilo, vzhledem ke stavu, v jakém se nacházel, když jsme začali s přípravou na měření) a měli tak na měření alespoň 2 hodiny, mohli bychom postup opakovat vícekrát – tedy určitě i přesněji. Když uvážím všechny tyto nepříznivé vlivy, troufám si říci, že námi změřená hodnota gravitační konstanty je celkem slušná.

Použitá literatura:

[1] http://rumcajs.fjfi.cvut.cz/fyzport/FundKonst/Cavendish/CavendishEn.pdf
[2] Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, SPN, Praha, 1988