

**FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM****FJFI ČVUT V PRAZE**

Číslo úlohy:	Název úlohy:		Datum měření:
10	Nucené harmonické kmity, Pohlovo torzní kyvadlo		11. 12. 2006
Kroužek:	Skupina:	Jméno:	Klasifikace:
3	12	Tomáš Jakoubek	

Zadání:I. Nucené harmonické kmity:

1. Změřte tuhost přiložených dvou pružin
2. Zvolte si závaží a předpovězte vlastní frekvenci harmonického systému pro obě pružiny. Pomocí kamery naměřte časový vývoj polohy závaží pro netlumené kmity. Odečtěte periodu kmitů a porovnejte s předpovědí.

II. Pohlovo torzní kyvadlo:

1. Změřte tuhost pružiny Pohlova kyvadla.
2. Naměřte časový vývoj výchylky kmitů kyvadla pro netlumené kmity. Za použití výsledku tohoto a minulého úkolu vypočítejte moment setrvačnosti kyvadla  $I$ .
3. Změřte koeficient útlumu pro několik zvolených hodnot tlumícího proudu. Závislost vynesete do grafu.
4. Pokuste se demonstrovat podkritické (slabé), kritické a nadkritické (silné) tlumení.

## Vypracování:

### Úvod do problematiky:

#### I. Nucené harmonické kmity:

Pokud svisle zavěšenou pružinu zatížíme závažím o hmotnosti  $m$ , platí

$$\Delta x k = m g \quad (1),$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení,  $k$  tuhost pružiny a  $\Delta x$  je prodloužení pružiny. Tento oscilátor vykonává netlumené kmity s vlastní úhlovou frekvencí

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

a periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (3).$$

#### II. Pohlovo torzní kyvadlo:

Jedná se opět o harmonický oscilátor. Analogií tuhosti pružiny je zde tzv. torzní konstanta  $D$ , kterou lze spočítat ze vztahu

$$r m g = D \varphi \quad (4),$$

kde  $m$  je hmotnost zavěšeného závaží,  $g$  tíhové zrychlení,  $r$  poloměr kotouče a  $\varphi$  je výchylka kyvadla v radiánech. Je však výhodnější měřit výchylku jako vzdálenost, o kterou poklesne konec lanka (uchyceného na vnějším kotouči kyvadla) po zavěšení závaží. Platí vztah

$$\varphi = \frac{\Delta x}{r} \quad (5),$$

kde  $\Delta x$  je vzdálenost, o kterou poklesne závaží a  $r$  je poloměr kotouče kyvadla. Pro torzní konstantu pak platí vztah

$$D = \frac{r^2 m g}{\Delta x} \quad (6).$$

I zde pro periodu platí vztah

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (3).$$

Pro vlastní úhlovou frekvenci platí vztah

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (7),$$

kde  $I$  je moment setrvačnosti Pohlova kyvadla. Pro dvě po sobě jdoucí amplitudy  $A_n$  a  $A_{n+1}$  platí

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = e^{-\delta T} \quad (8),$$

kde  $\delta$  je koeficient útlumu a  $T$  je perioda kmitů. Koeficient útlumu vyjádříme z (8) jako

$$\delta = \frac{1}{T} \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (9).$$

## Použité přístroje:

- I.: 2 pružiny o různých tuhostech (červená a modrá), stojan, sada závaží, technické váhy, diodová kamera, PC (s programovým vybavením), metrové měřítko
- II.: Pohlovo torzní kyvadlo, sada závaží, technické váhy, ampérmetr, vodiče, pohybový senzor s kladkou, PC (s programovým vybavením)

## Postup měření:

### I. Nucené harmonické kmity:

#### 1. Tuhost pružin:

Nejdříve jsem si na technických vahách zvažil všechna používaná závažíčka. Pro obě pružiny (červenou a modrou) jsem použil stejný postup: pružinu jsem zavěsil na stojan s měřítkem a poté odečítal prodloužení pružiny v závislosti na hmotnosti zavěšeného závaží. Tuhost pružin spočítám ze vztahu (1). Naměřené a spočtené hodnoty viz. Tab. 1 a Tab. 2.

#### 2. Vlastní frekvence pružin, perioda kmitů:

Opět pro obě pružiny stejný postup: pružinu jsem zavěsil na stojan a na ní závaží o hmotnosti  $m$ . Spustil jsem program a nastavil diodovou kameru, aby snímala pohyb závaží. Pružinu jsem rozkmital a pomocí kamery a PC snímal pohyb závaží. Z naměřených hodnot jsem pak odečet periodu kmitů  $T$ . Ze vztahu (3) spočítám vlastní frekvenci  $\omega_0$ . Tu můžu porovnat s hodnotou spočítanou pomocí vztahu (2) a výsledků předchozího měření. Naměřené a spočtené hodnoty viz. Tab. 3, Tab. 4 a Tab. 5.

### II. Pohlovo torzní kyvadlo:

#### 1. Tuhost pružiny Pohlova kyvadla:

Postup byl téměř stejný, jako u měření tuhosti pružin. Na lanko jsem zavěšoval závaží o různých hmotnostech a na PC odečítal velikost poklesu konce lanka  $\Delta x$ . Ze vztahu (6) pak určím torzní konstantu Pohlova kyvadla. Naměřené a spočtené hodnoty viz. Tab. 6.

#### 2. Časový vývoj výchylky kmitů, moment setrvačnosti:

Na konec lanka jsem zavěsil závaží o hmotnosti  $m$  a kyvadlo rozkmital. Na PC jsem měřil časový vývoj výchylky kmitů. Z toho jsem pak odečetl periodu kmitů  $T$ . Ze vztahů (3) a (7) a za použití výsledku předešlého měření (torzní konstanta  $D$ ) pak určím moment setrvačnosti  $I$  Pohlova kyvadla. Naměřené a spočtené hodnoty viz. Tab. 7.

#### 3. Koeficient útlumu:

V aparatuře Pohlova kyvadla bylo zabudované tlumení pomocí elektrického proudu. Pro několik hodnot tlumícího proudu jsem pomocí PC zaznamenával časový vývoj výchylek kmitů, ze kterého jsem pak určil velikost dvou po sobě jdoucích amplitud  $A_n$  a  $A_{n+1}$ . Na kyvadle bylo zavěšeno závaží o hmotnosti  $m$  a perioda kmitů byla  $T$ . Naměřené a spočtené hodnoty viz. Tab. 8, grafická závislost viz. Graf. 1.

#### 4. Podkritické, kritické a nadkritické tlumení:

Pomocí různých hodnot tlumícího proudu jsem se pokusil demonstrovat:

- podkritické tlumení: amplituda kyvadla exponenciálně klesá, pohyb je přibližně periodický, viz. Obr. 1,  $I = 0,3$  A
- kritické tlumení: kyvadlo právě nepřekmitne, pohyb není periodický, kyvadlo se v tomto případě vrátí rychle do rovnovážné polohy (resp. nekonečně blízko k ní), viz. Obr. 2,  $I = 1,5$  A
- nadkritické tlumení: kyvadlo nepřekmitne a do rovnovážné polohy se vrací nekonečně dlouho, pohyb není periodický, viz. Obr. 3,  $I = 2,0$  A.

### Naměřené hodnoty:

Č. měř.	$m$ [g]	$\Delta x$ [cm]	$k$ [kgs <sup>-2</sup> ]
1	51,62	5,30	9,555
2	54,16	5,40	9,839
3	54,82	5,60	9,603
4	58,40	5,95	9,629
5	61,32	6,30	9,548
6	69,52	7,15	9,538
7	72,72	7,50	9,512
8	78,36	8,25	9,318
9	81,56	8,35	9,582
10	91,44	9,35	9,594
AP			9,572

Tab. 1: Tuhost červené pružiny

Č. měř.	$m$ [g]	$\Delta x$ [cm]	$k$ [kgs <sup>-2</sup> ]
1	51,62	7,90	6,410
2	54,16	8,30	6,401
3	54,82	8,45	6,364
4	58,40	8,90	6,437
5	61,32	9,45	6,366
6	91,44	13,90	6,453
7	72,72	11,10	6,427
8	78,36	11,95	6,433
9	69,52	10,65	6,404
10	81,56	12,45	6,427
AP			6,412

Tab. 2: Tuhost modré pružiny

Tuhost červené pružiny je  $k_c = (9,57 \pm 0,04) \text{ kgs}^{-2}$ .  
 Tuhost modré pružiny je  $k_m = (6,41 \pm 0,01) \text{ kgs}^{-2}$ .

Při měření vlastních frekvencí bylo na obě pružiny zavěšeno závaží o hmotnosti  $m = 69,52 \text{ g}$ .

Č. měř.	$T$ [s]	$\omega_0$ [Hz]
1	0,561	11,200
2	0,529	11,877
3	0,540	11,636
4	0,559	11,240
5	0,547	11,487
AP		11,488

Tab. 3: Vlastní frekvence červené pružiny

Č. měř.	$T$ [s]	$\omega_0$ [Hz]
1	0,641	9,802
2	0,630	9,973
3	0,670	9,378
4	0,690	9,106
5	0,658	9,549
AP		9,562

Tab. 4: Vlastní frekvence modré pružiny

Pružina	$\omega_{0-k}$ [Hz]	$\omega_{0-T}$ [Hz]
Červená	$(11,73 \pm 0,04)$	$(11,49 \pm 0,13)$
Modrá	$(9,60 \pm 0,01)$	$(9,56 \pm 0,15)$

Tab. 5: Vlastní frekvence pružin;  $\omega_{0-k}$  – spočtená pomocí  $k$ ,  $\omega_{0-T}$  – naměřená pomocí  $T$

Č. měř.	$m$ [g]	$\Delta x$ [cm]	$D$ [kgm <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]
1	3,84	1,70	0,0196
2	7,08	3,20	0,0192
3	10,40	4,70	0,0192
4	12,98	5,70	0,0197
5	15,55	6,90	0,0195
AP			0,0194

Tab. 6: Torzní konstanta Pohlova kyvadla

Torzní konstanta Pohlova kyvadla tedy je  $D = (19,4 \pm 0,1) \text{ gm}^2\text{s}^{-2}$ .

Při tomto a následujícím měření bylo Pohlovo kyvadlo zatíženo závažím o hmotnosti  $m = 3,84$  g.

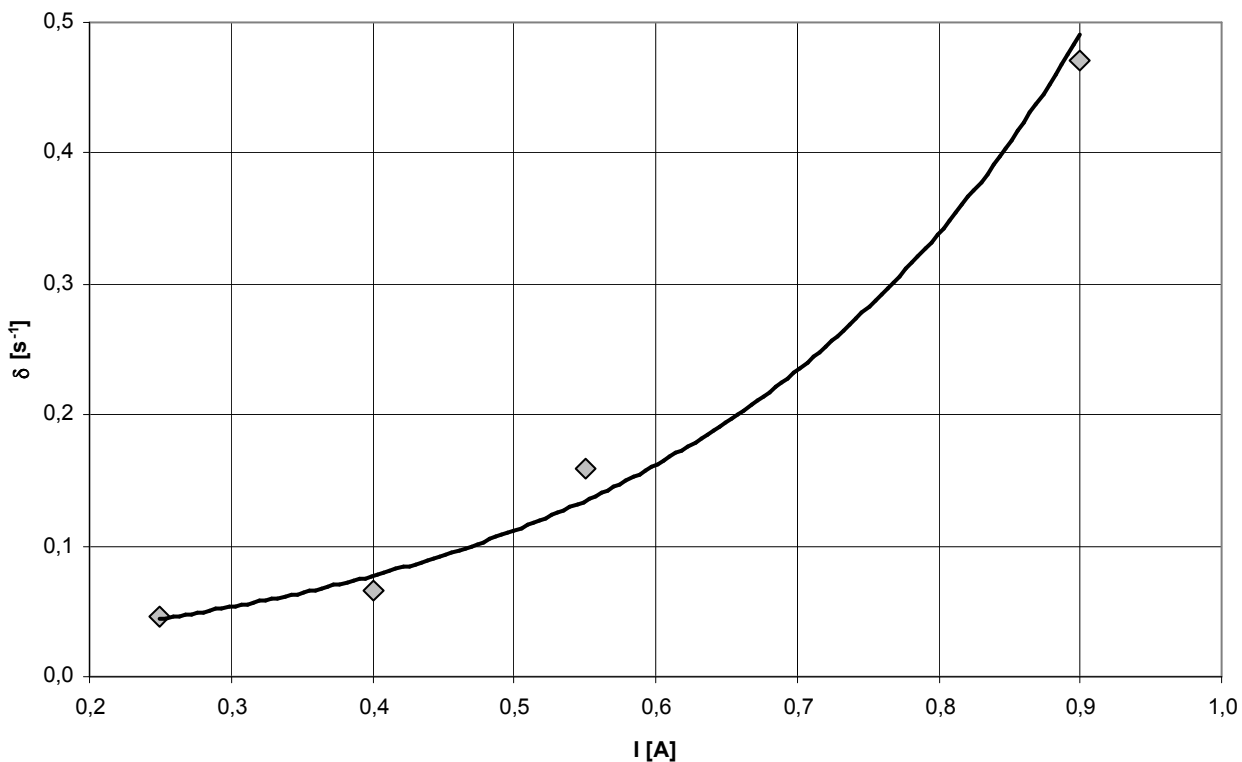
Č. měř.	$T$ [s]	$I$ [kgm <sup>2</sup> ]
1	1,730	0,00147
2	1,755	0,00151
3	1,760	0,00153
4	1,720	0,00146
5	1,765	0,00153
AP		0,00150

Tab. 7: Moment setrvačnosti Pohlova kyvadla

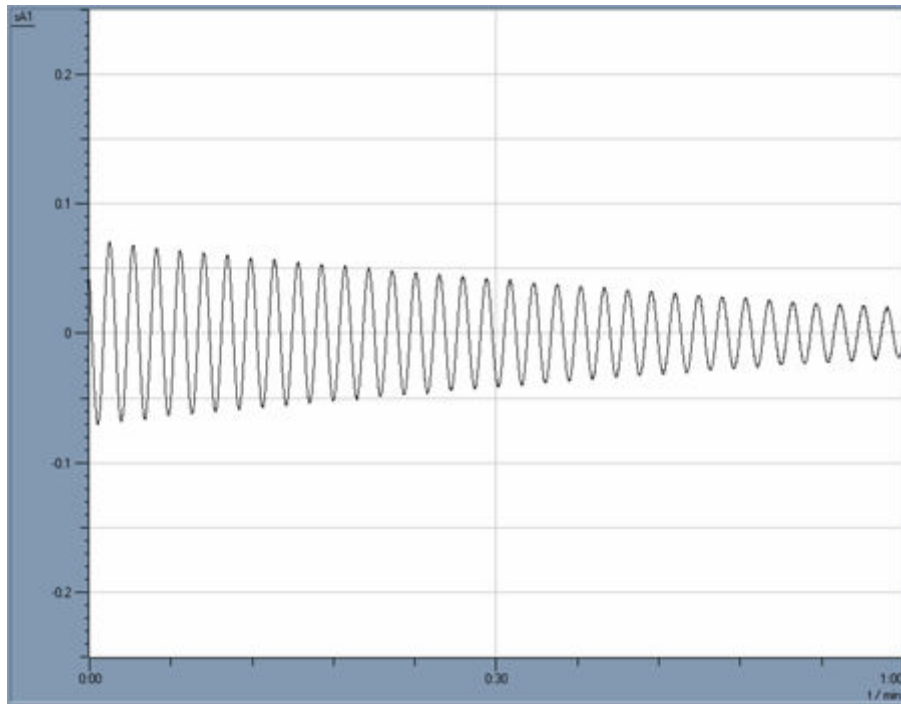
Moment setrvačnosti Pohlova kyvadla je tedy  $I = (1,50 \pm 0,01) \text{ gm}^2$ .

Č. měř.	$I$ [A]	$A_n$ [cm]	$A_{n+1}$ [cm]	$T$ [s]	$\delta$ [s <sup>-1</sup> ]
1	0,25	6,60	6,10	1,730	0,046
2	0,40	5,50	4,90	1,750	0,066
3	0,55	5,00	3,80	1,725	0,159
4	0,90	2,50	1,10	1,745	0,470

Tab. 8: Koeficienty útlumu pro různé hodnoty tlumícího proudu



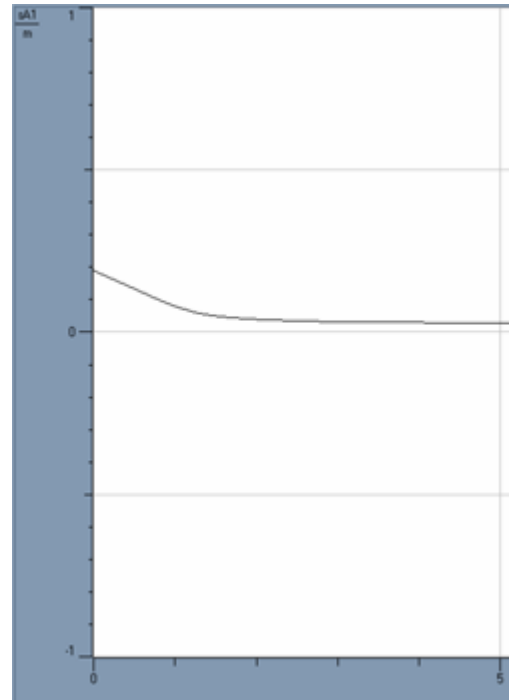
Graf. 1: Závislost koeficientu útlumu na tlumícím proudu



Obr. 1: Podkritické tlumení



Obr. 2: Kritické tlumení



Obr. 3: Nadkritické tlumení

## Diskuse:

### Nucené harmonické kmity:

Z Tab. 5 je vidět, že tuhost i vlastní frekvenci jsem určil relativně přesně. Zvlášť hodnoty vlastní frekvence u modré pružiny jsou si velmi blízké, toto měření bylo tedy nejspíš i přesnější. Jinak jsem při měření nezaznamenal žádné problémy. Vzhledem k tomu, že většinu věcí jsem měřil pomocí PC, k velkým chybám (způsobených lidskou nedokonalostí) ani docházet nemohlo.

### Pohlovo kyvadlo:

Určení tuhosti pružiny (torzní konstanty) i momentu setrvačnosti Pohlova kyvadla se opět obešlo bez obtíží, měření se zdá být i přesné.

Naměřený koeficient útlumu závisí na tlumícím proudu přibližně exponenciálně (viz. Graf. 1), tedy tak, jak má.

Na pečlivé demonstrování různých druhů tlumení mi už nezbylo příliš času. Kdybych ho měl více, určitě bych si mohl se zkoušením různých nastavení více vyhrát. Hlavně případ kritického útlumu by mohl být lepší.

## Závěr:

V první části jsem určil tuhosti pružin: červené na  $k_c = (9,57 \pm 0,04) \text{ kgs}^{-2}$  a modré na  $k_m = (6,41 \pm 0,01) \text{ kgs}^{-2}$ . Dále jsem určil jejich vlastní frekvenci dvěma způsoby, viz. Tab. 5.

Pružina	$\omega_{\theta-k}$ [Hz]	$\omega_{\theta-T}$ [Hz]
Červená	$(11,73 \pm 0,04)$	$(11,49 \pm 0,13)$
Modrá	$(9,60 \pm 0,01)$	$(9,56 \pm 0,15)$

Tab. 5: Vlastní frekvence pružin;  $\omega_{\theta-k}$  – spočtená pomocí  $k$ ,  $\omega_{\theta-T}$  – naměřená pomocí  $T$

V druhé části jsem určil tuhost pružiny (torzní konstantu) Pohlova kyvadla na  $D = (19,4 \pm 0,1) \text{ gm}^2\text{s}^{-2}$ .

Moment setrvačnosti Pohlova kyvadla jsem určil na  $I = (1,50 \pm 0,01) \text{ gm}^2$ .

Dále jsem změřil koeficienty útlumu pro několik hodnot tlumícího proudu (viz. Tab. 8 a Graf. 1).

Na závěr jsem se pokusil demonstrovat různé druhy tlumení: podkritické, kritické a nadkritické.

## Použitá literatura:

- [1] [http://fyzika.fjfi.cvut.cz/Mechanika/HarmOscillator/mans/P19\\_MASS.pdf](http://fyzika.fjfi.cvut.cz/Mechanika/HarmOscillator/mans/P19_MASS.pdf)
- [2] <http://fyzport.fjfi.cvut.cz/Praktika/PohlKyv/praktika/praktika.pdf>